25/02/2015

Φυλλάδιο #1

Άσκηση 2

$$
\begin{array}{l|l}
3x^5+2x^4+0x^3+0x^2-7x+2 & x^2+x+2 \\
\underline{-3x^5-3x^4-6x^3} & 3x^3-x^2-5x+7 \\
\quad -x^4-6x^3+0x^2-7x+2 & \\
\quad \underline{x^4+x^3+2x^2} & \\
\qquad -5x^3+2x^2-7x+2 & \\
\qquad \underline{5x^3+5x^2+10x} & \\
\qquad\quad 7x^2+3x+2 & \\
\qquad\quad \underline{-7x^2-7x-14} & \\
\qquad\qquad -4x-12 &
\end{array}
$$

Άρα πηλίκο : $3x^3-x^2-5x+7$

υπόλοιπο διαίρεσης $-4x-12$

Άσκηση 3

α) x^3-x^2+2x-2

α' τρόπος: $x^3-x^2+2x-2=(x^3+2x)-(x^2+2)=x(x^2-2)-(x^2+2)=$

$=(x-1)(x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})$

Επομένως

ρίζα	πολλαπλότητα
1	1
$i\sqrt{2}$	1
$-i\sqrt{2}$	1

β) $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

ρίζα	πολ/τητα
$\sqrt{2}$	1
$-\sqrt{2}$	1

γ) $p(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$

Έστω $\frac{\rho}{q}$ πιθανή ρίζα με $\rho, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$, ΜΚΔ$(\rho, q) = 1$. Τότε: $\begin{cases} \rho \text{ διαιρεί το } 8 \\ q \text{ διαιρεί το } 1 \end{cases}$ (291)

Τότε $\rho \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$, $q \in \{1\}$

Επομένως το 1 ρίζα. Άρα το $x-1$ διαιρεί το $P(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 & x-1 \\ \underline{-x^4 + x^3} & x^3 + 6x^2 \ldots \\ -6x^3 + 18x^2 - 20x + 8 & \\ \underline{6x^3 - 6x^2} & \\ 12x^2 - 20x + 8 \ldots & \end{array}$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις βλέπουμε ότι $P(x) = (x-1)h(x)$, όπου $h(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. Πιθανές ρίζες του $h(x)$: $\frac{\rho}{q}$ όπως προηγουμένως. Το 2 ρίζα του $h(x)$ γιατί $2^3 - 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 8 = 0$. Διαιρώντας το $h(x)$ με το $x-2$, παίρνουμε $h(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 4) = (x-2)^3$. Επομένως

ρίζες	πολ/τητα
1	1
2	3

δ) $p(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

$\frac{\rho}{q}$ με $\rho, q \in \mathbb{Z}$ και $q \geq 1$ πιθανή ρίζα $\Leftrightarrow \begin{cases} \rho \text{ διαιρεί το } 2 \\ q \text{ διαιρεί το } 6 \end{cases}$

Άρα $\rho \in \{\pm 1, \pm 2\}$
$q \in \{1, 2, 3, 6\}$

Επομένως, υποψήφιες ρίζες: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}$

$p(x) = (x+2)(6x^2 - 5x + 1)$

Με τριώνυμο: $p(x) = 6(x+2)(x - 1/2)(x - 1/3)$

ρίζα	πολ/τητα
-2	1
1/2	1
1/3	1

Άσκηση 1

α.) Σώμα $\mathbb{Z}_2 = \{[0]_2, [1]_2\}$ και πράξεις $[0]_2 + [0]_2 = [0]_2$

$[0]_2 + [1]_2 = [1]_2 + [0]_2 = [1]_2$

$[1]_2 + [1]_2 = [0]_2$

$[0]_2 [0]_2 = [0]_2 [1]_2 = [1]_2 [0]_2$

$[1]_2 [1]_2 = [1]_2$

Έστω $p(x)$

→ Πολυώνυμο βαθμού 4, όχι ανάγωγο και χωρίς ρίζα

$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ με $a, b, c, d, e \in \{[0]_2, [1]_2\}$

Αφού $p(x)$ όχι ανάγωγο, υπάρχουν $\lambda(x), \mu(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ όχι ουδέτερα με $p(x) = \lambda(x)\mu(x)$. Άρα $\deg\lambda(x) + \deg\mu(x) = 4$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \deg\lambda(x) = 2, \deg\mu(x) = 2 \\ \text{ή } \deg\lambda(x) = 3, \deg\mu(x) = 1 \\ \text{ή } \deg\lambda(x) = 1, \deg\mu(x) = 3 \end{cases}$

Η περίπτωση $\deg\lambda(x) = 1$ ή $\deg\mu(x) = 1$ δεν μπορεί να συμβαίνει γιατί τότε το $\lambda(x)$ και το $\mu(x)$ έχει ρίζα $\Rightarrow p(x)$ έχει ρίζα. Επομένως $\deg\lambda(x) = \deg\mu(x) = 2$ και επιπλέον το $\lambda(x)$ και το $\mu(x)$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}_2$.

Έστω $\lambda(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ με $a_i \in \mathbb{Z}_2$. Αν $a_0 = [0]_2$ το $\lambda(x)$ έχει ρίζα τη $[0]_2$ αντίφαση. Άρα $\lambda(x) = [1]_2 + a_1 x + a_2 x^2$ με $a_2 \neq [0]_2$ γιατί αλλιώς έχει ρίζα. Συνεπώς, $\lambda(x) = [1]_2 + a_1 x + [1]_2 x^2$. Αν $a_1 = [0]_2$ το $\lambda(x)$ έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}_2$ την $x = [1]_2$. Άρα $\lambda(x) = [1]_2 + [1]_2 x + [1]_2 x^2$ που δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{Z}_2$. Η ίδια ανάλυση δίνει $\mu(x) = \lambda(x) = [1]_2 + [1]_2 x + [1]_2 x^2$ και άρα $p(x) = \lambda(x)\mu(x) = ([1]_2 + [1]_2 x + [1]_2 x^2)^2$

Άσκηση 4

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \chi_A(x) = \det(A - xI) \overset{\det}{=} \begin{bmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{bmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 2 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} = -(x$

$\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1)^2(x-5)$

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ	ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ
1	2
5	1

Υπολογίζουμε $V_A(1)$

$$(A-1I_3)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\{x+y+z=0$ Άρα $V_A(1)=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times1} : x+y+z=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\-x\end{bmatrix} : x,y\in\mathbb{R}\right\}=$

$$\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$$

$V_A(5)$ $(A-5I_3)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-3&1&1\\2&-2&2\\1&1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$(\Sigma)\begin{cases}-3x+y+z=0\\2x-2y+2z=0\\x+y-3z=0\end{cases}$$

Μετά από πράξεις το (Σ) είναι ισοδύναμο με $\begin{cases}y=2z\\x=z\end{cases}$

Επομένως, $V_A(5)=\left\{\begin{bmatrix}z\\2z\\z\end{bmatrix} : z\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\rangle$

$$B=\begin{bmatrix}0&i&i\\i&0&i\\i&i&0\end{bmatrix} \quad \chi_B(x)=\begin{vmatrix}-x&i&i\\i&-x&i\\i&i&-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-x&0&i\\2i&0&i-x\\i&1&-x\end{vmatrix}=$$

$$-(x+i)\begin{vmatrix}-x&i\\2i&i-x\end{vmatrix}=-(x+i)^2(x-2i)$$

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ	ΠΟΛ/ΤΑ
$-i$	2
$2i$	1

Υπολογίζουμε $V_B(-i)$

$$(B-(-i)I_3)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}i&i&i\\i&i&i\\i&i&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

(2i) $\{ix + iy + iz = 0\} \Leftrightarrow \{x + y + z = 0\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2ix + iy + iz = 0 \\ ix - 2iy + iz = 0 \\ ix + iy - 2iz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$ Μετά από πράξεις

$$\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Επομένως $V_B(2i) = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$